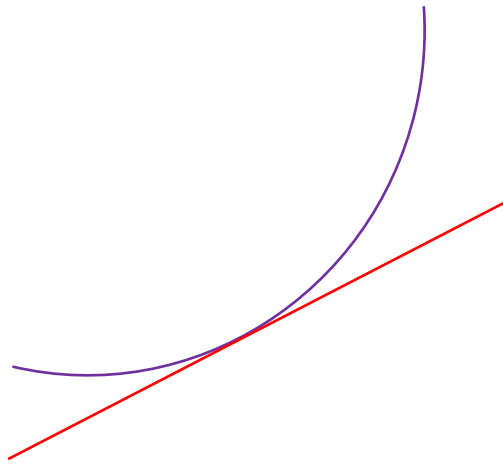


חשבון
דיפרנציאלי
ואינטגרלי
I



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות

הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר <http://www.gool.co.il> הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לצפיה בשיעור חינם בעמוד הקורס: **חדו"א 1**

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

- פרק 1 - פונקציה ממשית 5
- פתרונות 6
- פרק 2 - גבול של פונקציה 7
- פתרונות 11
- פרק 3 - רציפות ומשפט ערך הביניים 12
- רציפות 12
- משפט ערך הביניים (של קושי) 14
- פתרונות 14
- פרק 4 - גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת Error! Bookmark not defined.
- פתרונות Error! Bookmark not defined.
- פרק 5 - גזירה של פונקציה 15
- פתרונות 16
- פרק 6 - נגזרות של פונקציות מיוחדות Error! Bookmark not defined.
- נגזרת הפונקציה ההפוכה Error! Bookmark not defined.
- פתרונות Error! Bookmark not defined.
- פרק 7 - בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת) 18
- פתרונות 19
- פרק 8 - כלל לופיטל 20
- פתרונות 22
- פרק 9 - חקירת פונקציה 23
- פתרונות 24
- פרק 10 - חקירת פונקציה - "שאלות מסביב" 29
- פתרונות 31
- פרק 11 - מקסימום ומינימום מוחלטים של פונקציה 32
- פתרונות 32
- פרק 12 - בעיות מקסימום ומינימום 33
- בעיות בהנדסת המישור 33
- בעיות בהנדסת המרחב 37
- בעיות בפונקציות וגרפים 39
- פתרונות 42
- פרק 13 - פתרון משוואות (משפט ערך הביניים, מונוטוניות (משפט רול), ניוטון רפסון) 42
- פתרונות 43
- פרק 14 - בעיות קצב שינוי Error! Bookmark not defined.

Error! Bookmark not defined. פתונות

Error! Bookmark not defined..... פרק 15 - משפט לגרנג'

Error! Bookmark not defined..... פרק 16 - טור טיילור/מקלורן

Error! Bookmark not defined. נוסחת השארית של לגרנג'

Error! Bookmark not defined. פתונות

Error! Bookmark not defined..... פרק 17 - סדרות

Error! Bookmark not defined. פתונות

Error! Bookmark not defined..... פרק 18 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מידי)

Error! Bookmark not defined..... פרק 19 - האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים)

Error! Bookmark not defined..... פרק 20 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)

Error! Bookmark not defined..... פרק 21 - האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה)

Error! Bookmark not defined..... פרק 22 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)

Error! פרק 23 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות)

Bookmark not defined.

Error! Bookmark not defined. אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת זהויות בלבד)

Error! Bookmark not defined. אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)

Error! Bookmark not defined. אינטגרלים עם שורשים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)

Error! Bookmark not defined..... פרק 24 - האינטגרל המסויים

Error! Bookmark not defined..... פרק 25 - שימושי אינטגרל המסויים (שטח ואורך קשת)

Error! Bookmark not defined. חישוב שטחים

Error! Bookmark not defined..... פרק 26 - שימושי אינטגרל המסויים

Error! Bookmark not defined. נפח של גוף סיבוב

Error! Bookmark not defined..... פרק 27 - גזירת האינטגרל

Error! Bookmark not defined..... פרק 28 - אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים)

Error! Bookmark not defined..... פרק 29 - תיאוריה (הוכחות נבחרות)

Error! Bookmark not defined..... פרק 30 - נושאים מתקדמים - רציפות במידה שווה

Error! Bookmark not defined. רציפות במידה שווה לפי הגדרה

Error! Bookmark not defined. תנאים לרציפות במידה שווה

Error! Bookmark not defined. תנאים לשלילת רציפות במידה שווה

Error! Bookmark not defined.....	נספחים - נוסחאות
Error! Bookmark not defined.	נוסחאות - גבולות
Error! Bookmark not defined.	נוסחאות - נגזרות
Error! Bookmark not defined.	נוסחאות - אינטגרלים
Error! Bookmark not defined.	נוסחאות - טריגו
Error! Bookmark not defined.	נוסחאות - אלגברה
Error! Bookmark not defined.	נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

פרק 1 - פונקציה ממשית

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3) \quad y = \frac{1}{x^2-4} \quad (2) \quad y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6) \quad y = \frac{x^2}{x^2-x-2} \quad (5) \quad y = \frac{1}{x^3-x} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9) \quad y = \sqrt[3]{x^2+x-1} \quad (8) \quad y = \sqrt{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11) \quad y = \ln(x^2+x-2) \quad (10)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15) \quad y = \tan(10x) \quad (14) \quad y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18) \quad y = \arcsin(x-4) \quad (17) \quad y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

(2) נתונות הפונקציות הבאות : $h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x - 4$

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות :

$$h(h(x)) \quad (6) \quad f(f(x)) \quad (5) \quad h(f(x)) \quad (4) \quad f(g(x)) \quad (3) \quad h(g(f(5))) \quad (2) \quad f(g(1)) \quad (1)$$

(3) בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = x^2 - 4 \quad (x \geq 0) \quad (4) \quad f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

(4) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות הוא זוגיות ואיזה זוגיות :

$$y = \frac{1}{x} \quad (4) \quad y = 1 \quad (3) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \quad y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8) \quad y = \ln x + x^2 \quad (7) \quad y = 2^x \quad (6) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (5)$$

(5) מצא את המחזור של כל אחת מהפונקציות הבאות :

$$y = \sin^2 x \quad (4) \quad y = \tan \frac{x}{3} \quad (3) \quad y = 5 + 3\sin(4x+1) \quad (2) \quad y = 2\sin x \quad (1)$$

(6) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מפוצלת* ושרטט את גרף הפונקציה.

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad y = x^2 + 2|x-1| \quad (3) \quad y = 3|x+1| \quad (2) \quad y = |x-2| \quad (1)$$

* יש הקוראים לפונקציה "מפוצלת", פונקציה "מוטלאת" או פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקרים".

פתרונות

$$\begin{array}{llllll}
 (1) & & & & & \\
 x \text{ כל } (1) & x \neq \pm 2 (2) & x \text{ כל } (3) & x \neq 0, 1, -1 (4) & x \neq 2, -1 (5) & \\
 x \geq 4 (6) & x \leq -2 \text{ או } x \geq 1 (7) & x \text{ כל } (8) & -1 < x < 1 (9) & x < -2 \text{ או } x > 1 (10) & \\
 0 < x \neq 1 (11) & x \text{ כל } (12) & 0 < x \neq 1 (13) & x \neq \pi/20 + \pi/10 k (14) & x \neq \pi/4 \cdot k (15) & \\
 x \text{ כל } (16) & 3 < x < 5 (17) & -2 < x < 0 (18) & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
 (2) & & & & & \\
 -3 (1) & 4 (2) & x^2 - 4 (3) & \frac{4}{x-4} (4) & x-8 (5) & x (6) \\
 (3) & & & & & \\
 y \neq 3, f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3} (3) & y \neq 1, f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} (2) & y \text{ כל } , f^{-1}(x) = 3x+1 (1) & & & \\
 & & , f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} (4) & & & \\
 & & y \geq -4 & & &
 \end{array}$$

(4)
 זוגיות - 2, 3, 5, 8 אי זוגיות - 1, 4 כלליות - 6, 7
 (5)

$$\begin{array}{llll}
 (6) & & & \\
 \pi (4) & 3\pi (3) & \pi/2 (2) & 2\pi (1) \\
 (1) & & & \\
 y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} & & & \\
 (2) & & & \\
 y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} & & & \\
 (3) & & & \\
 y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} & & & \\
 (4) & & & \\
 y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} & & &
 \end{array}$$

פרק 2 - גבול של פונקציה

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x-3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x+1} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x-2} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5) \\ & & & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9) \end{aligned}$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5) \end{aligned}$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7) \end{aligned}$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9) \end{aligned}$$

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x \right) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + kx} - x \right) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx} \right) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x} \right)^x \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+2x+2} \right)^{10x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4} \right)^{4x^2} \quad (7)$$

(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדויץ'):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפוצלת):

$$(a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

(10) חשב על פי הגדרת הגבול את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \quad (5)$$

$$(11) \text{ הוכח על פי הגדרה את הגבול : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$$

הערה חשובה מאוד !

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות. בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

פתרונות

									(1)	
						40 (4)	2 (3)	$\frac{11}{12}$ (2)	21 (1)	
									(2)	
$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)	-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)	(3)	
	$-\frac{8}{3}$ (8)	$\frac{1}{3}$ (7)	$\frac{3}{4}$ (6)	$\frac{1}{6}$ (5)	$\frac{3}{8}$ (4)	$-\frac{1}{12}$ (3)	4 (2)	$\frac{1}{2}$ (1)	(4)	
1 (9)	4 (8)	$\frac{1}{8}$ (7)	$\frac{1}{2}$ (6)	$\frac{1}{2}$ (5)	$\frac{1}{2}$ (4)	$\frac{1}{2}$ (3)	$\frac{3}{4}$ (2)	$\frac{3}{4}$ (1)	(5)	
0 (9)	ϕ (8)	∞ (7)	∞ (6)	$-\infty$ (5)	ϕ (4)	$-\infty$ (3)	ϕ (2)	ϕ (1)	(6)	
						$-\infty$ (12)	ϕ (11)	1 (10)	(6)	
-3 (9)	-1 (8)	1 (7)	-5 (6)	0 (5)	$-\infty$ (4)	4 (3)	$-\frac{\pi}{2}$ (2)	0 (1)	(7)	
$e^{\frac{1}{3}}$ (18)	$\ln 3$ (17)	2 (16)	$\frac{1}{9}$ (15)	4 (14)	0 (13)	0.25 (12)	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11)	1.5 (10)	(7)	
	$\frac{a-b}{2}$ (26)	1/2 (25)	-1/2 (24)	1/2 (23)	$k/2$ (22)	2.5 (21)	(**) (20)	0 (19)	(7)	
e (9)	e^{30} (8)	e^{-12} (7)	e (6)	e^3 (5)	e^{-1} (4)	e^2 (3)	1 (2)	$e^{\frac{1}{2}}$ (1)	(8)	
1 (9)	4 (8)	0.75 (7)	0 (6)	0 (5)	3 (4)	0.75 (3)	0 (2)	0 (1)	(9)	
								0 (10)	(9)	
					-1 (5)	1 (4)	ϕ (3)	ϕ (2)	4 (1)	(10)
									(10)	
		$\pm\infty$ (7)	$\sin \pi / 4$ (6)	1 (5)	5 (4)	0 (3)	9 (2)	28 (1)	(10)	

(**) בשאלה 6 תרגיל 20 יש להפריד לשלושה מקרים:

$$\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}} \leftarrow b \neq 0 \quad \text{(I)}$$

$$\lim = \infty \leftarrow a > 0, b = 0 \quad \text{(II)}$$

$$\lim = -\infty \leftarrow a < 0, b = 0 \quad \text{(III)}$$

פרק 3 - רציפות ומשפט ערך הביניים

רציפות

(1) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" שלהן :
(בסעיפים 3 ו-4 שרטט את גרף הפונקציה).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (6) \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

* נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

למשל, נקודת התפר בתרגיל 1 היא $x = 0$.

(2) מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה : על סעיף 4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל .

(3) מה צריך להיות הערך של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות

בתחום הגדרתן :

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \quad (2) \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \quad (1) \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \quad (4) \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

הערה : על סעיפים 3 ו-4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל .

(4) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלה (1) רשום עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא.

(5) הוכח או הפרך :

1. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
2. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
3. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
4. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- (6) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f + g$ רציפה? הוכח את טענתך.

משפט ערך הביניים (של קושי)

(7) צטט את משפט ערך הביניים של קושי והסבר אותו גרפית.

(8) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד :

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3) \quad x^2 = -\ln x \quad (2) \quad x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

(9) הוכח שלמשוואה $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ יש לפחות פתרון אחד.

(10) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות שני פתרונות :

$$4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (2) \quad e^x - 5x = 0 \quad (1)$$

(11) תהי f פונקציה רציפה לכל x המקיימת: $f(0) = 1, f(1) = 2$.

הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש לפחות פתרון אחד.

(12) מצא קטע שאורכו אינו עולה על יחידה אחת בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון. (13)

$$\text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשב $f(0), f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$ יש פתרון בקטע $(0, 2)$.

פתרונות

(1) (1) לא רציפה. (2) לא רציפה. (3) רציפה. (4) רציפה. (5) רציפה בנקי: $x = 0, 1$, לא רציפה

בנקודה $x = 2$. (6) רציפה בנקי $x = 1$. לא רציפה בנקי $x = 2$. (1) (2) $k = 1$. (2) $k = 4$.

(3) $k = \frac{2}{3}$. (4) $k = -1$. (1) (3) $a = 0, b = \frac{1}{2}$. (2) $a = 1, b = 2$ או $a = 2, b = 1$.

(3) $a = -2e^{-1}, b = e^{-1}$. (4) $a = e/3, b = -e/3$. (1) (4) סליקה. (2) סליקה. (5) מסוג

ראשון. (6) סליקה. (12) $[0.1, 1]$. (13) א. $f(0) = -1, f(2) = 5$. ב. לא.

פרק 4 - גזירה של פונקציה

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 27-29 גזור פעם אחת) :

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

פתרונות

$$(2) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$(4) \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$(6) \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

$$(8) \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

$$(10) \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$(12) \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2}$$

$$(13)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\}$$

$$(15) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 + 2x}{x^4} \right)$$

$$(16)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2)$$

$$(17)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$$

$$(18)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2 - 1)^{5/3}}$$

(19)

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$$

(20)

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3)$$

(21)

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4)$$

(22)

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x$$

(23)

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$$

(24)

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2)$$

(25)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2-3x-2}}, \quad f''(x) = \frac{2x+3}{2(-x^2-3x-2)^{3/2}}$$

(27)

(26)

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

(29)

(28)

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x)$$

פרק 5 - בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)

- (1) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (2) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (3) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (4) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את a ו- c .
- (5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.
- (6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$ בנקודה $x = 0$.
- (7) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3, 4)$.
- (8) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצא את k ואת נקודת ההשקה.
- (9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.
 א) $(2, -3)$ $y = x^2 - 2x + 1$ ב) $(-3, 1)$ $y = \sqrt{x}$
- (10) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:
 $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.
- (11) מצא את הזווית בין הפונקציות $y = f(x) = x^2$ ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$.
- (12) מצא את הזווית בין המעגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולה $y^2 = 2x$.
- (13) הוכח שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

פתרונות

(1) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

(2) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

(3) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.

(4) נקודת ההשקה היא $(0, \frac{1}{2})$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

(5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

(6) משוואת המשיק היא $y = 1$.

(7) משוואת המשיק היא $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

(8) נקודת ההשקה $(1,1)$, $k = 1.5$.

(9) א) $(0,1)$, $y = -2x + 1$, $(4,9)$, $y = 6x - 15$.

ב) המשיק: $(9,3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

(10) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$

(11) 71.57°

(12) 71.56°

פרק 6 - כלל לופיטל

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x-2} - 1} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (39)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (38)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (42)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (41)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (40)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (45)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (44)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (43)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (48)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (47)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (46)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad (51)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (50)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (49)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (54)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad (53)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4)^{x-2} \quad (52)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad (57)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (56)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (55)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x} \quad (60)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \quad (59)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \quad (58)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (63)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\cot^2 x} \quad (62)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x} \quad (61)$$

(2) כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. הראה זאת והסבר מדוע למרות כך, כלל לופיטל

אינו ישים, לבסוף חשב את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

פתרונות**(1)**

$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)	$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)
$\frac{1}{2}$ (21)	$\frac{1}{2}$ (20)	$\frac{1}{6}$ (19)	$\frac{a}{b}$ (18)	$\frac{a}{b}$ (17)	1 (16)	1 (15)
1 (28)	1 (27)	$-\frac{3}{4}$ (26)	$-\frac{1}{2}$ (25)	$-\frac{1}{3}$ (24)	$\frac{1}{3}$ (23)	$\frac{1}{8}$ (22)
0 (35)	∞ (34)	0 (33)	∞ (32)	$\frac{1}{2}$ (31)	$\frac{1}{2}$ (30)	$\frac{2}{3}$ (29)
0 (42)	0 (41)	0 (40)	0 (39)	0 (38)	0 (37)	1 (36)
$\frac{1}{2}$ (49)	$\ln\frac{3}{5}$ (48)	0.5 (47)	0 (46)	2.5 (45)	6 (44)	0 (43)
1 (56)	e^2 (55)	1 (54)	1 (53)	1 (52)	e (51)	$-\frac{1}{2}$ (50)
1 (63)	e (62)	1 (61)	1 (60)	$e^{-1/2}$ (59)	$e^{1/3}$ (58)	e^3 (57)
					$e^{-1/6}$ (65)	e (64)

(2)

0.75 (3) 0.25 (2) 1 (1)

פרק 7 - חקירת פונקציה

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים*, זוגיות, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות**, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול***, תחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (3) \qquad f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2) \qquad f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (6) \qquad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5) \qquad f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (9) \qquad f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (8) \qquad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (12) \qquad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (11) \qquad f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (10)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 3 \quad (15) \qquad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (14) \qquad f(x) = x \cdot \ln x \quad (13)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (18) \qquad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (17) \qquad f(x) = 4\ln^2 x - 4\ln x - 3 \quad (16)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (21) \qquad f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (20) \qquad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (19)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (24) \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (23) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (22)$$

$$f(x) = x - 2\arctan x \quad (27) \qquad f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (26) \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (25)$$

$$f(x) = 8\cos x + 2\cos 2x - 3 \quad (30) \quad f(x) = 2\cos^2 x - \sin 2x \quad (29) \quad f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (28)$$

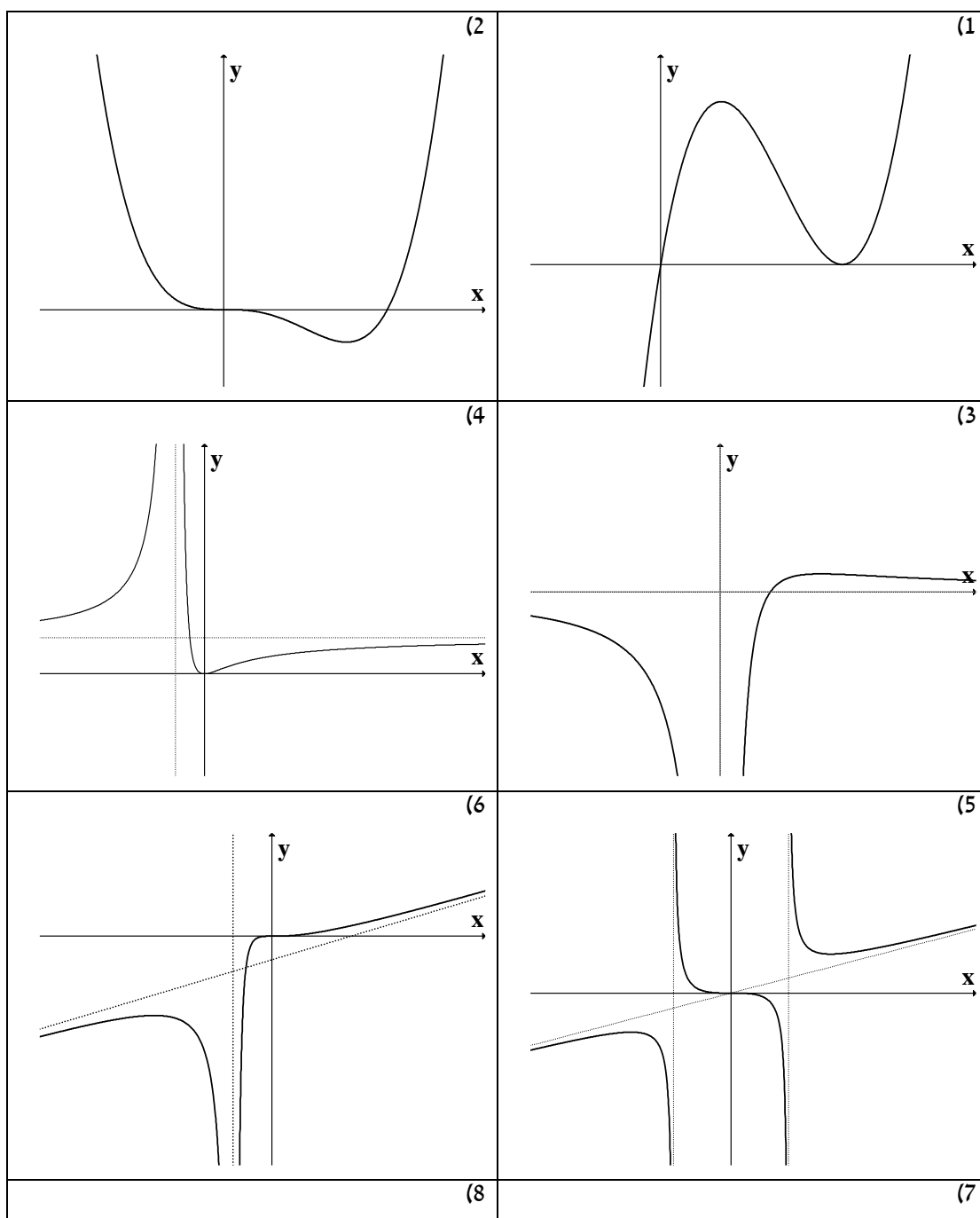
$(0 \leq x \leq 2\pi)$ $(0 \leq x \leq \pi)$

הערות:

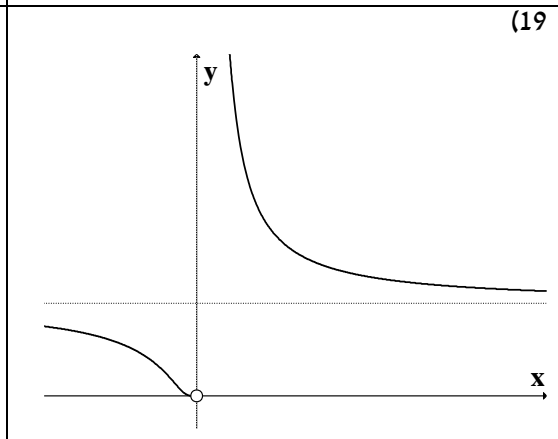
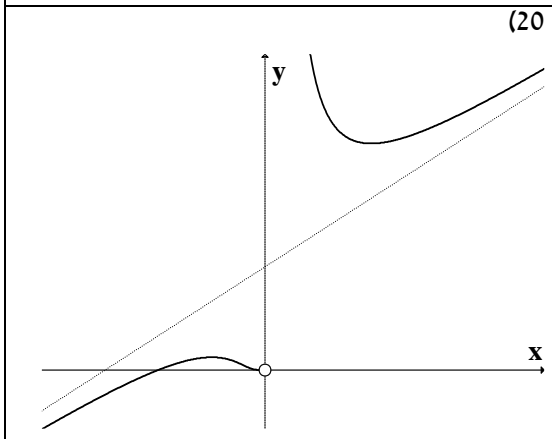
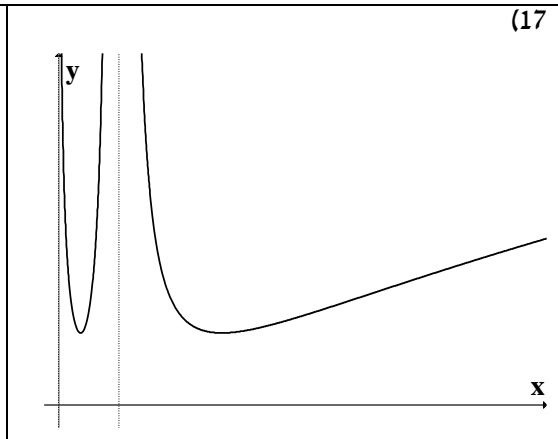
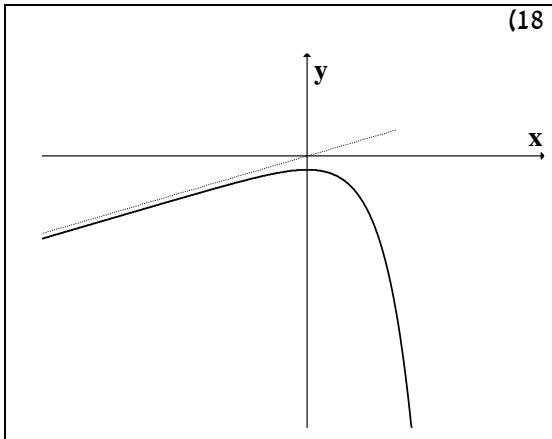
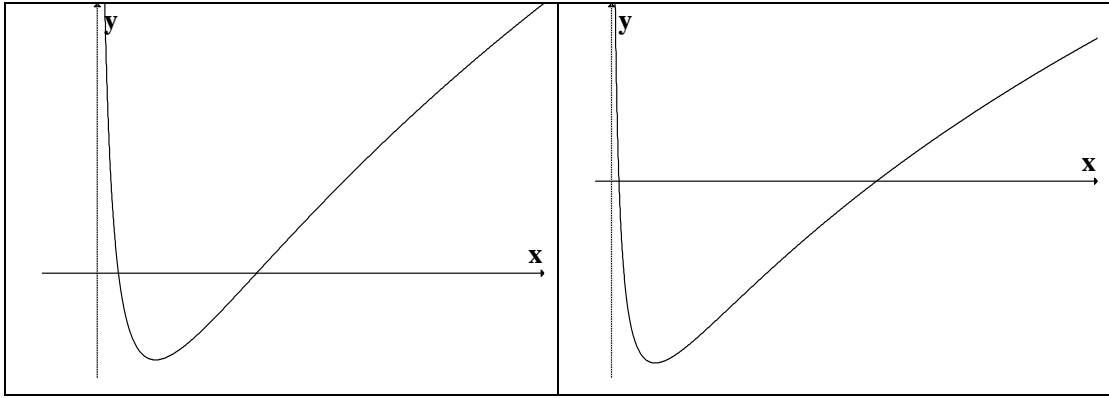
* בשאלה 27 אין צורך למצוא חיתוך עם ציר x . בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.
 ** בתרגילים 1,2,28,29,30 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).
 *** בתרגילים 9,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם ניוטון רפסון. בתרגיל 8 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם לפתור משוואה ממעלה שלישית.

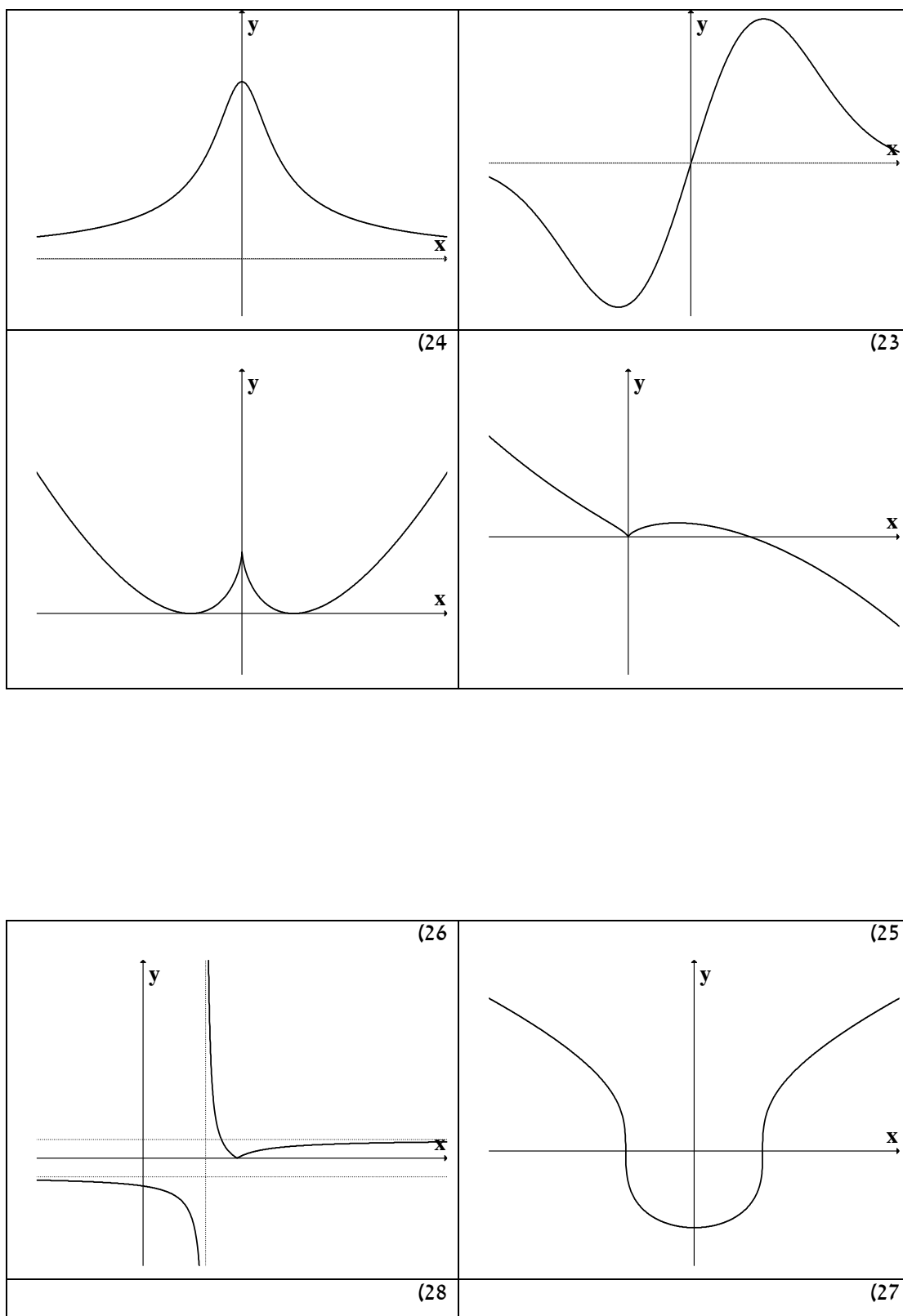
פתרונות

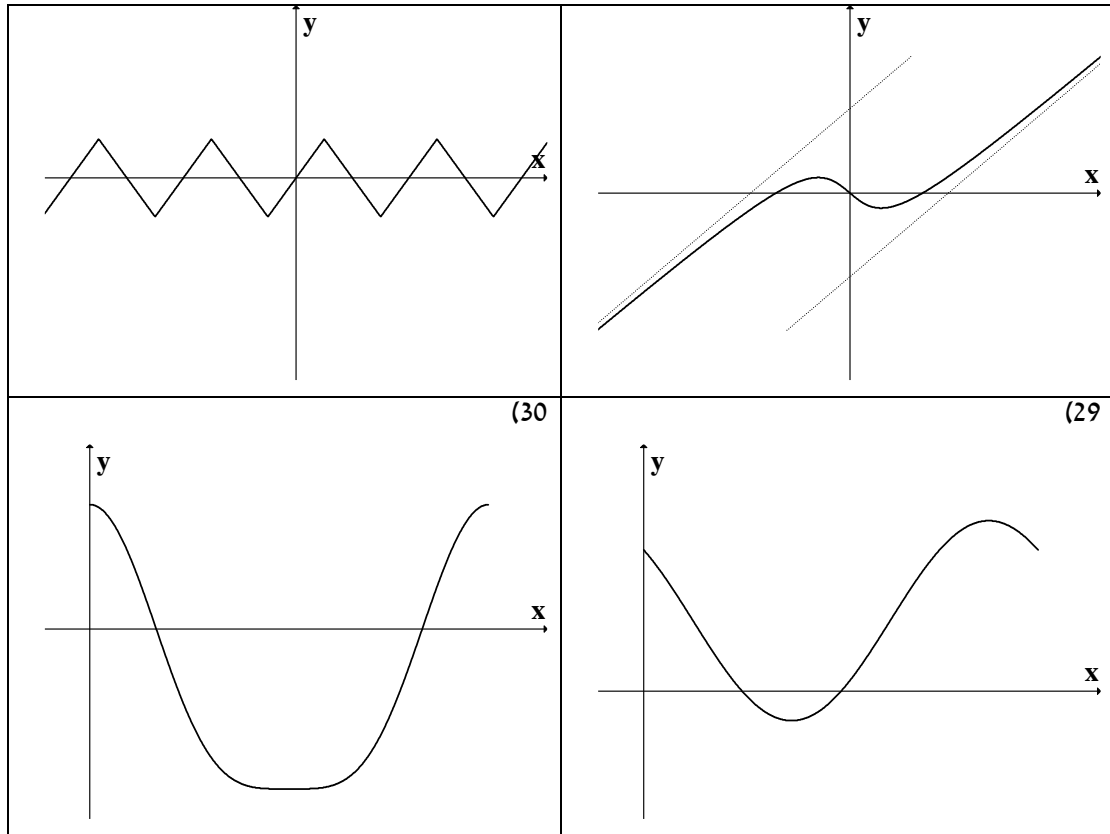
(1)



<p>(10)</p>	<p>(9)</p>
<p>(12)</p>	<p>(11)</p>
<p>(14)</p>	<p>(13)</p>
<p>(16)</p>	<p>(15)</p>







פרק 8 - חקירת פונקציה - "שאלות מסביב"

(1)

(א) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצא את הקבוע a .

(ב) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון.

מצא את הקבועים a, b .

(ג) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת פיתול. מצא את הקבוע a .

(ד) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת פיתול.

מצא את הקבועים a, b .

(ה) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$ הוא 33.

מצא את a .

(ו) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3, 9)$ הוא 12.

מצא את a, b .

(ז) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

(ח) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף

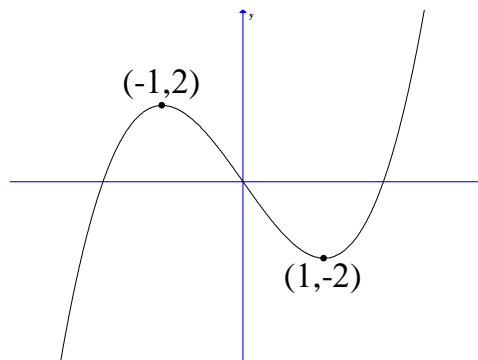
הפונקציה. מצא את a ואת b .

(ט) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$. ידוע שהישר $x = 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

(2) לפניך גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$

- א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$.
- ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$.
- ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$.
- ד. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד.
- ה. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות.
- ו. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות.
- ז. האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון.
- ח. מצא את התחומים בהם הפונקציה היא ח"ע.



(3) הוכח את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty) \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (2) \quad (0 < x < \frac{\pi}{3}) \quad x < 2 \sin x$$

$$(3) \quad (x > 0) \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (4) \quad (x \geq 0) \quad \ln(x+1) \leq x$$

פתרונות

(1)

$a = -\frac{1}{3}$ (ג)

$b = 6, a = -4$ (ב)

$a = -\frac{2}{3}$ (א)

$a = \frac{2}{3}, b = -1$ (ו)

$a = 1$ (ה)

$b = 3, a = -1$ (ד)

$a = -7$ (ט)

$a = 0.5$ (ח)

$a = 8$ (ז)

(2)

3 (ג)

2 (ב)

1 (א)

$-2 < k < 2$ (ו)

$k = \pm 2$ (ה)

$k < -2$ או $k > 2$ (ד)

$-1 < x < 1$ או $x < -1$ (ח)

(ז) לא

או $x > 1$

פרק 9 - מקסימום ומינימום מוחלטים של פונקציה

(1) מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות הבאות בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2) \quad (-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right) f(x) = \begin{cases} 4x-2 & x < 1 \\ (x-2)(x-3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4) \quad (-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{2/3}(20-x) \quad (3)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad (6) \quad (-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

(2) הוכח את אי השוויונים שמימין לגבי התחום הרשום בסוגריים משמאל.

$$(x \leq 1) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1 \quad (3) \quad (x \geq 0) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \quad (2) \quad (x \text{ לכל}) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (1)$$

פתרונות

(1)

(1) $(-1, -7)$ מינימום מוחלט, $(3, 9)$ מקסימום מוחלט.

(2) $(-1, 0)$ מינימום מוחלט, $(5, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 3)$ מקסימום מוחלט.

(3) $(0, 0)$ מינימום מוחלט, $(20, 0)$ מינימום מוחלט, $(8, 48)$ מקסימום מוחלט.

(4) $(2.5, -0.25)$ מינימום מוחלט, $(1, 2)$ מקסימום מוחלט.

(5) $(-3, 1)$ מינימום מוחלט, $(-5, 17)$ מקסימום מוחלט.

(6) $(-2, -4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.

(7) אין מקסימום ואין מינימום.

הערת סימון:

$$[a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b \quad , \quad (a, b) \Leftrightarrow a < x < b \quad , \quad [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$$

פרק 10 - בעיות מקסימום ומינימום

הערה: בפרק זה, סומנו התרגילים הקשים יותר בכוכבית *

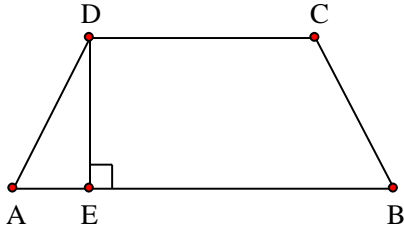
בעיות בהנדסת המישור

(1) בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel CD$) אורך השוק

הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ.

DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור).

מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?



(2) נתון מלבן $ABCD$. נסמן ב- x את אחת מצלעות

המלבן (ראה ציור).

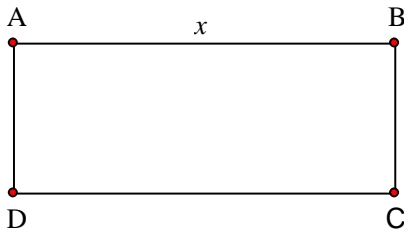
(א) אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ בטא באמצעות x

את שטח המלבן.

(ב) אם היקף המלבן הוא p מצא מה צריכים להיות

אורכי צלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי

(הבע את אורכי הצלעות באמצעות p).



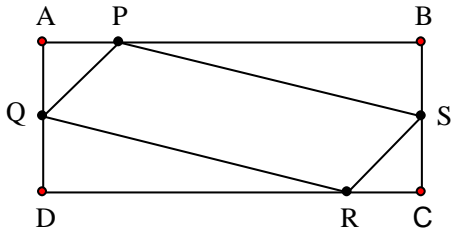
(3) נתון מלבן $ABCD$ כך ש- $AD = BC = 5$ ס"מ,

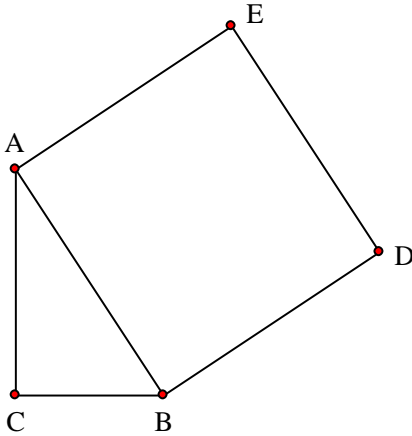
$AB = CD = 10$ ס"מ. על צלעות המלבן מקצים

קטעים: $AP = AQ = CS = CR = x$ (ראה ציור).

מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח

המקבילית $PQRS$ יהיה מקסימלי?

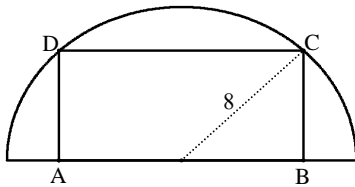




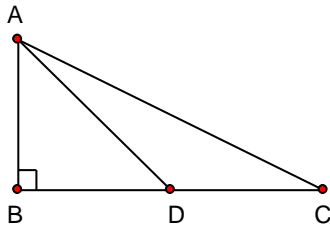
(4)

במשולש ישר זווית ΔABC ($\angle C = 90^\circ$) סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE. מה צריכים להיות אורכי הניצבים, כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי.

(5)

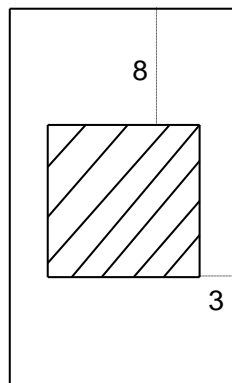


בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר, והקדקודים C ו-D מונחים על הקשת (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



(6)

במשולש ישר-זווית ΔABC ($\angle B = 90^\circ$), סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ. AD הוא תיכון לניצב BC (ראה ציור). חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים, על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.



(7)

בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר. רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ, ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ. מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד, כדי שהשטח המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח המקווקו בציור).

(8) בריבוע ABCD הנקודות E, F, G נמצאות על הצלעות
 AB , BC , CD בהתאמה, כך ש- $BE = BF = CG$

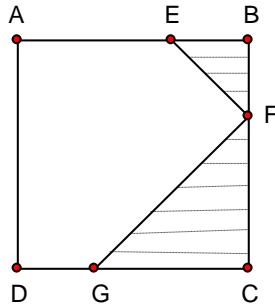
(ראה ציור).

נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.

א. סמן ב- x את BF ואת BE , והבע באמצעות x את
 הסכום של שטחי המשולשים EBF ו- FCG (השטח
 המקווקו בציור).

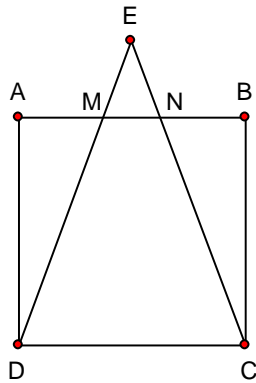
ב. מצא את x שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא
 מינימלי.

ב. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.



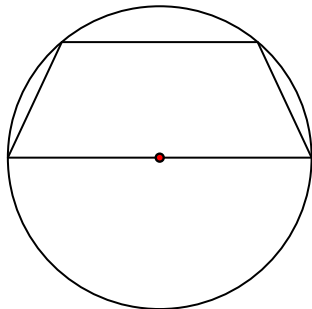
(9) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ. E היא נקודה

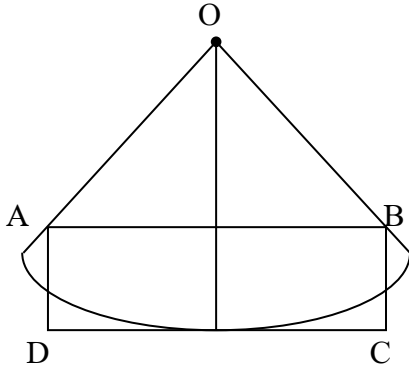
כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא שוו"ש
 $(ED = EC)$. שוקי המשולש חותכים את הצלע AB
 בנקודות M ו- N (ראה ציור). מצא מה צריך להיות
 אורך הקטע AM כדי שהסכום של שטחי המשולשים
 AMD , EMN , BNC יהיה מינימלי.



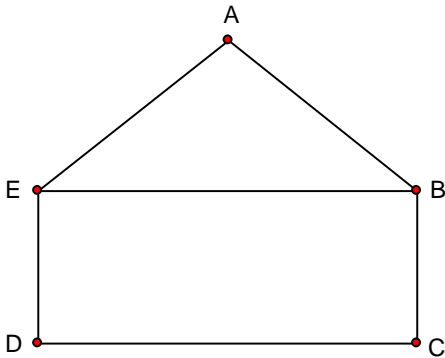
(10) נתון מעגל שרדיוסו R . במעגל זה חסום טרפז שוו"ש,

כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה
 ציור). מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה, הבע
 באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז ששטחו
 מקסימלי.

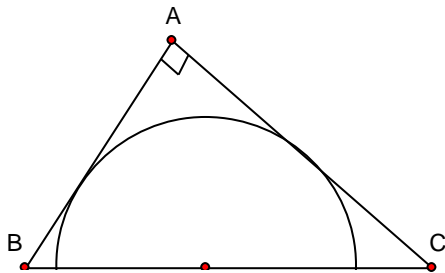




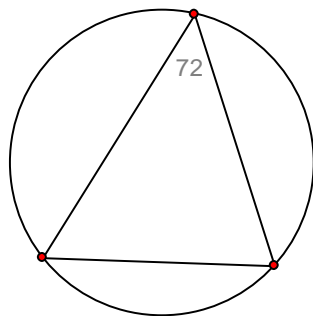
- (11) נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ.
 בונים מלבן ABCD, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC
 בנקודת האמצע שלה, והקודקודים A ו-B נמצאים על
 הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור).
 מבין כל האלכסונים של המלבנים ABCD שנוצרים
 באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.



- (12) ABCDE הוא מחומש המורכב ממשולש ABE וממלבן
 EBCD. (ראה ציור).
 נתון: $BC = 2$ ס"מ, $AB = AE = 4$ ס"מ.
 מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.



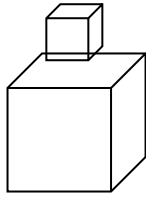
- (13) מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית ABC
 החוסמים חצי מעגל שרדיוסו R כמתואר בציור.
 מהן זוויות המשולש ששכום הניצבים שלו הוא
 מינימלי?



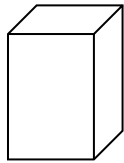
- (14) במעגל שרדיוסו R חסומים משולשים כך שהגודל של
 אחת הזוויות בכל אחד מהמשולשים הוא $\frac{2\pi}{5}$.
 מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.

בעיות בהנדסת המרחב

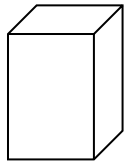
- (15) גובהו של "מגדל" הבנוי שמתו קוביות) לאו דווקא (שוות) הוא 8 ס"מ. מה צריך להיות אורך המקצוע ש הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי הקוביות) יהיה מינימלי ?



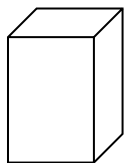
- (16) בונים תיבה שגובהה y ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך צלעו x ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת מהדפנות הצדדיות שווה ל-12 ס"מ. מה צריך להיות אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



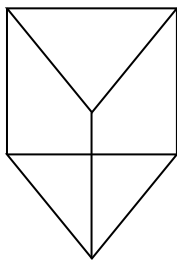
- (17) יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע ושטח פניה 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס וגובה) שנפחה מקסימלי.

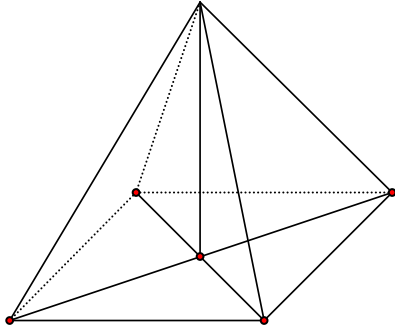


- (18) יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה, שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק. מהו האורך המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?



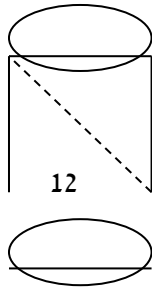
- (19) מחוט שאורכו a ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע הבסיס x ואיזה חלק לגובה y כדי שיתקיים: א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי. ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.



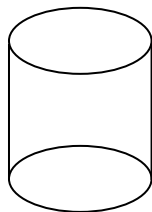


(*20) מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות, שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא a , מצא את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

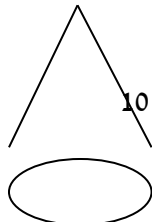
(*21) מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.



(22) אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה ציור). מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



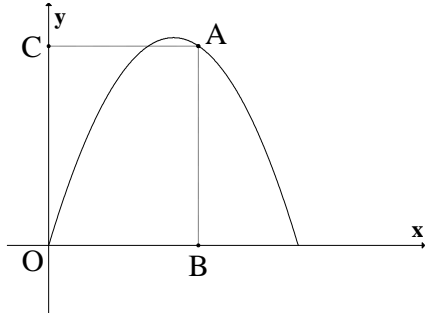
(23) נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק. המיכל עשוי כולו מפח. הראה כי שטח הפח הוא מינימלי כאשר רדיוס הבסיס הוא $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ מטר.



(24) מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10 ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?

בעיות בפונקציות וגרפים

(25) מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה



$$y = -x^2 + 5x, \text{ מורידים אנכים לצירים כך שנוצר}$$

מלבן ABOC (ראה ציור).

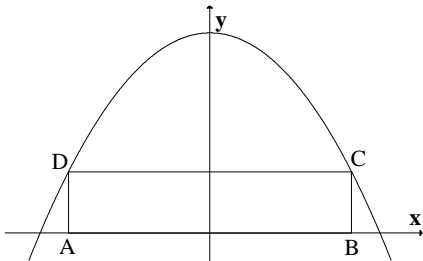
א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף

המלבן יהיה מקסימלי?

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף

המלבן יהיה מינימלי?

(26) בפרבולה $y = 9 - x^2$ חוסמים מלבן ABCD, כך

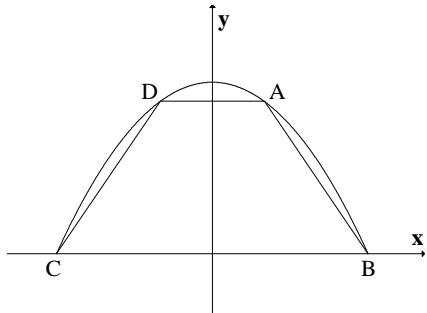


שהצלע AB מונחת על ציר ה-x (ראה ציור).

מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן

יהיה מקסימלי?

(27) טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה $y = 9 - x^2$



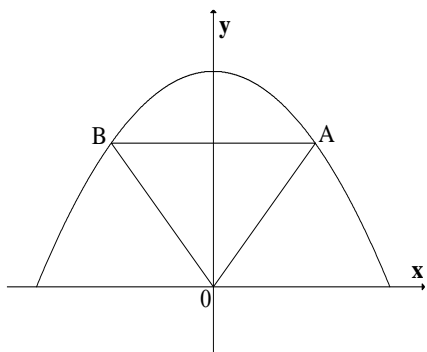
לבין ציר ה-x (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח

הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?

ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.

(28) נתונה הפרבולה $y = -x^2 + 12$. ישר המקביל לציר ה-



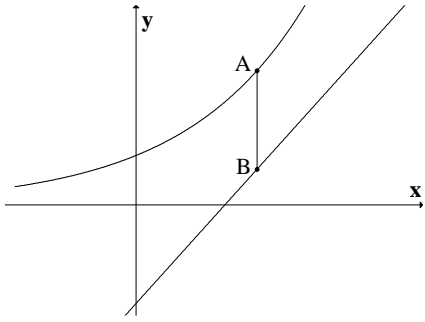
x חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B (ראה ציור).

מחברים את הנקודות A ו-B עם ראשית הצירים, O.

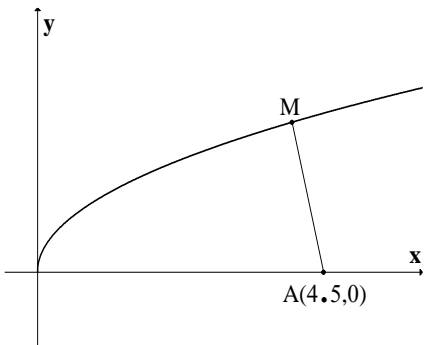
א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח

המשולש AOB יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB ?

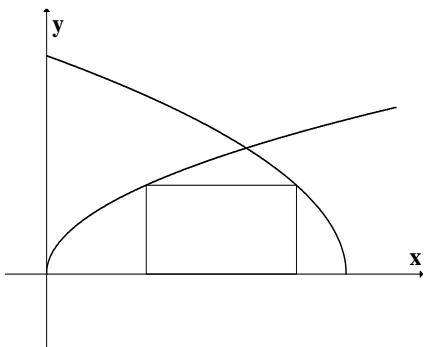


- (29) לפניך גרף של הפונקציה $y = e^x$ וגרף של הישר $y = e \cdot x - 2$. ישר המקביל לציר ה- y חותך את הגרפים בנקודות A ו-B (ראה ציור).
א. מצא לאילו ערכי x אורך הקטע AB יהיה מינימלי.
ב. האם יש ערך של x שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי?

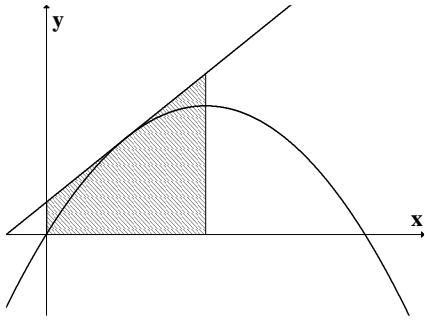


- (31) נתון גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$. על ציר ה- x נתונה הנקודה $A(4.5, 0)$ (ראה ציור).
מצא על גרף הפונקציה נקודה M, כך שריבוע המרחק AM יהיה מינימלי.

- (32) מצא על הישר $f(x) = 3x - 4$ את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $(0, 1)$.



- (*33) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
 $f(x) = \sqrt{3x}$, $g(x) = \sqrt{36-6x}$.
מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה- x , כמתואר בציור. מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי למלבן שחסום באופן זה.



(*34) דרך איזו נקודה על הפרבולה $y = -x^2 + 2x$ צריך

להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי

המשיק והישרים: $x = 0$, $x = 1$ ו- $y = 0$ (השטח

המקווקו שבציור) יהיה מינימלי?

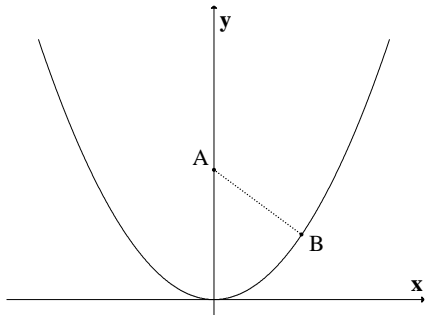
(*35) נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $y = x^2$ ברביע

הראשון. A היא הנקודה $(0, a)$ כאשר ידוע כי

$a > 0.5$ (ראה ציור).

א. בטא באמצעות a את שיעורי הנקודה B, שעבורה המרחק AB הוא מינימלי.

ב. מצא עבור איזה ערך של a המרחק המינימלי הוא 2.



(*36) נתונה הפרבולה $y = x^2$, ונתון משיק לפרבולה

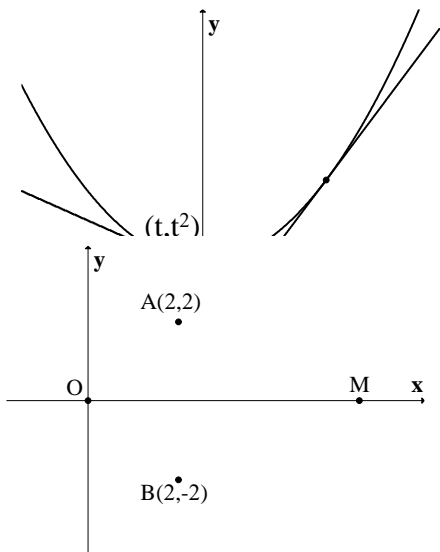
שמשוואתו היא $y = 6x - 9$. בנקודה (t, t^2) שעל

הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה.

המשיקים נחתכים בנקודה M (ראה ציור).

א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות t.

ב. מצא את t שעבורו אורך הקטע, המחבר את הנקודה M עם קודקוד הפרבולה יהיה מינימלי.



(*37) במערכת צירים נתונות הנקודות $A(2, 2)$ ו-

$B(2, -2)$. ראשית הצירים היא בנקודה O. M היא

נקודה על ציר ה-x בתחום $x > 0$. מה צריכים להיות

שיעורי הנקודה M, כדי שהסכום: $OM + MA + MB$ יהיה מינימלי?

פתרונות

- (1) $AE = 1.7_{cm}$. א. (2) $(30 - x)$. ב. כל צלע שווה ל- $0.25p$. (3) $x = 3.75_{cm}$.
- (4) $AC = BC = 4_{cm}$. (5) $AB = 2\sqrt{32}_{cm}$. (6) $B = 6_{cm}, BC = 24_{cm}$. (7) אורך: 40 ס"מ
- רוחב: 15 ס"מ. (8) א. $S = x^2 - 6x + 18$. ב. $x = 3$. ב. 9 סמ"ר. (9) $AM = 5/\sqrt{2}$.
- (10) בסיס קטן $R =$. (11) $4\sqrt{5}_{cm}$. (12) $12\sqrt{3}$ סמ"ר. (13) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.
- (14) $\frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}$. (15) 4 ס"מ. (16) 4 ס"מ. (17) צלע הבסיס: 5 ס"מ. גובה: 2.5
- ס"מ. (18) 120 ס"מ. א. (19) $x = \frac{1}{12}a, y = \frac{1}{6}a$. ב. $x = y = \frac{1}{9}a$. (20) $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$.
- (21) $\frac{500}{3}$ סמ"ק. (22) גובה: $\sqrt{48}$ ס"מ. רדיוס: $\sqrt{24}$ ס"מ. (24) 403.1 סמ"ק.
- (25) א. $A(3,6)$. ב. $A(0,0)$ או $A(5,5)$. (26) $CD = 2\sqrt{3}$. א. (27) $A(1,8)$. ב. 32 .
- (28) א. $AB = 4$. ב. $S_{\Delta AOB} = 16$. א. (29) $x = 1$. ב. אין. (30) $PQ = 4$.
- (31) $M(4,2)$. (32) $(1.5, 0.5)$. (33) 8 . (34) $(0.5, 0.75)$.
- (35) א. $B(\sqrt{(2a-1)/2}, (2a-1)/2)$. ב. 4.25 . א. (36) $y = 2t \cdot x - t^2$. ב. $t = -3/37$.
- (37) $M(0.845, 0)$.

פרק 11 - פתרון משוואות (משפט ערך הביניים, מונוטוניות (משפט רול),

ניוטון רפסון)

(1) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק פתרון אחד :

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (4) \quad x - 0.25\sin x = 7 \quad (3) \quad x^2 = -\ln x \quad (2) \quad x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

(2) נתונה המשוואה $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ונתון כי $b^2 < 3ac$.

מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכח את תשובתך.

(3) עבור כל אחת מהמשוואות הבאות מצא את מספר הפתרונות ופתור אותה.

$$x^2 + x \sin x = 1 - \cos x \quad (4) \quad \ln(x+5) - 4 = x \quad (3) \quad \arctan x - x = 0 \quad (2) \quad e^{x-1} = x \quad (1)$$

(4) תהי f פונקציה גזירה לכל x המקיימת: $f'(x) \leq 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

(5) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק שני פתרונות :

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (3) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (2) \quad e^x - 5x = 0 \quad (1)$$

(6) בכל אחת מהמשוואות הבאות מצא קשר בין הפרמטרים על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון

אחד (הנח שכל הפרמטרים שונים מאפס).

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2) \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (4) \quad x + a \cos(bx) = 1 \quad (3)$$

(7) פתור את המשוואות הבאות (סעיפים 2,3 בשיטת ניוטון רפסון):

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (3) \quad 1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (2) \quad 7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0 \quad (1)$$

פתרונות

(2) פתרון יחיד. (3) (1) $x = 1$ (2) $x = 0$ (3) $x = -4$ (4) $x = 0$.

$$\frac{1}{ab} < -1 \text{ או } \frac{1}{ab} > 1 \quad (3) \quad 4b^2 - 12ac < 0 \quad (2) \quad b^2 - 4ac = 0 \quad (1) \quad (6)$$

$$b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0 \quad (4)$$

(7) (1) פתרון מדויק $x = -1$. (2) פתרונות מקורבים $x = 0.5576$, $x = 1.9672$.

(3) פתרון מקורב $x = 0.8459$